

ИФШ «Рысь-2» Итоговая олимпиада

9 класс уровень 2

Задача №1

Небольшой шарик подвешен к горизонтальному стержню на тонкой невесомой нити длиной $l = 10$ см.

- Какую минимальную скорость необходимо сообщить шарiku в горизонтальном направлении, чтобы он смог сделать оборот в вертикальной плоскости?
- Через какое минимальное время шарик сможет удариться о стержень при сообщении ему скорости из п.1?
- В какой точке шарик перестанет двигаться по окружности, если сообщенная скорость в нижней точке будет в два раза меньше минимальной?

Решение

Шарик на ниточке

Дано: $l = 0,1$ м | Вопрос №1 3.0.3

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv_1^2}{2}$$

$$v_0^2 = 4gl + v_1^2 \quad (1)$$

Условие прохождения точки 2

$$\left. \begin{aligned} a_n &= g \\ a_n &= \frac{v_1^2}{l} \end{aligned} \right\} v_1^2 = gl \quad (2)$$

$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow v_0^2 = 4gl + gl \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gl} = 2,24 \frac{m}{s}$

Вопрос №2

$$l = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 2,24 \frac{m}{s} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\frac{g}{2} t^2 - v_0 t + l = 0$$

$$D = v_0^2 - 2gl = 5gl - 2gl = 3gl$$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{3gl}}{g} = \frac{\sqrt{5gl} \pm \sqrt{3gl}}{g}$$

$$t_{min} = \frac{\sqrt{5gl} - \sqrt{3gl}}{g} = 0,05 \text{ с}$$

Вопрос №3 Условие схода: $T=0$

Пусть сход произошел в точке А

ИЗ. М. для (1) А в проекции на ОХ

$$m a_n = m g \cdot \sin \alpha \rightarrow a_n = g \sin \alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = r \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (3)$$

З.П. 7

$$-m g r + \frac{m v_0^2}{2} = m g h + \frac{m v^2}{2}$$

$$h = r \sin \alpha \Rightarrow -g r + \frac{v_0^2}{2} = g r \sin \alpha + \frac{r g \sin \alpha}{2}$$

$$-g r + \frac{5 g r}{2} = g r \sin \alpha + \frac{r g \sin \alpha}{2}$$

$$\frac{5-r}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{4}$$

Т.к. $\sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 180^\circ \Rightarrow$ тело не достигнет нулевым уровнем; значит, при этом $T \neq 0 \Rightarrow$

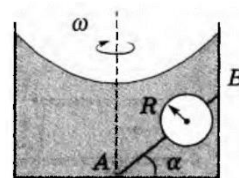
Ответ: схода не будет

Распределение баллов:

- Ответ на первый вопрос:
 - Правильно записанный закон сохранения энергии – 1 балл
 - Правильно использовано условие прохождения верхней точки – 1 балл
 - Получен правильный ответ – 1 балл
- Ответ на второй вопрос:
 - Получено правильное уравнение движения – 1 балл
 - Получен правильный ответ с обоснованием выбора корня – 1 балл
- Ответ на третий вопрос:
 - Указано условие «схода» с окружности – 1 балл
 - Правильно записан закон сохранения энергии – 1 балл
 - Второй закон Ньютона для точки «схода» – 1 балл
 - Обоснованный правильный ответ – 2 балла

Задача №2

На горизонтальной платформе стоит сосуд с водой. В сосуде закреплен тонкий стержень АВ, наклоненный к горизонту под углом α (см. рисунок). Шар радиусом R может скользить без трения вдоль стержня, проходящего через его центр. Плотность шара ρ_0 , плотность воды ρ ($\rho_0 < \rho$). При вращении системы с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через нижний конец А стержня, центр шара устанавливается на расстоянии l от этого конца.



- С какой силой N шар действует на стержень?
- Найдите угловую скорость ω вращения платформы.
- При какой минимальной угловой скорости вращения ω_{\min} шар «утонет» и окажется на дне сосуда?

Воды достаточно, так что шар всегда полностью погружен в воду. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Решение

Вращающийся сосуд

Дано: Вопрос №1

$F_{Ay} = \rho g V$
Перейдем в ИСЦО
запишем ИЗ.М.
в проекции на Оу.

$$0 = -mg + N \cdot \cos \alpha + F_{Ay}$$

$$N = \frac{mg - F_{Ay}}{\cos \alpha} = \frac{\rho_0 V g - \rho g V}{\cos \alpha} = \frac{V \cdot g (\rho_0 - \rho)}{\cos \alpha}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \left[N = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g (\rho_0 - \rho)}{\cos \alpha} \right]$$

Вопрос №2: запишем ИЗ.М. в проекции на ось Ох

$$0 = F_{Ax} + N \cdot \sin \alpha - F_u \Rightarrow m a = \rho V a + N \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \omega^2 \cdot r \\ r &= l \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \alpha = \omega^2 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$m \omega^2 l \cos \alpha = \rho V \omega^2 l \cos \alpha + \frac{V g (\rho_0 - \rho) \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$V \rho_0 \omega^2 l \cos^2 \alpha = \rho V \omega^2 l \cos^2 \alpha + V g (\rho_0 - \rho) \cdot \sin \alpha$$

$$\omega^2 l \cos^2 \alpha (\rho_0 - \rho) = g (\rho_0 - \rho) \cdot \sin \alpha$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \sin \alpha}{l \cdot \cos^2 \alpha}}$$

Вопрос №3
Шарик "утопце"

Заметим что N - не зависит от положения шарика.
 $AC = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}$ - новый радиус \Rightarrow
 $a_1 = \omega_p^2 \cdot AC = \omega_0^2 \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha}$ (2)

(2) \rightarrow (1) $\Rightarrow m \omega_0^2 \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \rho V \omega_0^2 \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} + N \cdot \sin \alpha$

$\rho_0 V \cdot \omega_0^2 \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = \rho V \omega_0^2 \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{V g (\rho_0 - \rho) \sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\frac{\omega_0^2 R}{\operatorname{tg} \alpha} (\rho_0 - \rho) = g (\rho_0 - \rho) \cdot \operatorname{tg} \alpha$

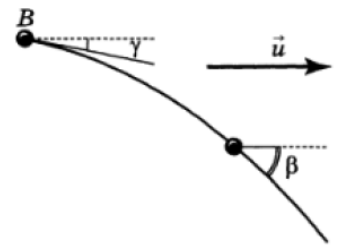
$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R} \cdot \operatorname{tg} \alpha}}$

Распределение баллов:

- Ответ на первый вопрос:
 - Правильная расстановка сил, действующих на шарик в выбранной СО – 1 балл
 - Правильная запись второго закона Ньютона – 1 балл
 - Правильная формула силы Архимеда – 1 балл
 - Правильный ответ – 1 балл
- Ответ на второй вопрос:
 - Правильная формула для ускорения системы – 1 балл
 - Правильное выражение, из которого можно получить угловую скорость – 2 балла
 - Правильный ответ – 1 балл
- Ответ на третий вопрос:
 - Правильно выражен новый радиус – 1 балл
 - Получен правильный ответ – 1 балл

Задача №3

Тело В удерживается неподвижно в воздушном потоке, движущемся с горизонтальной скоростью \vec{u} . В некоторый момент тело отпускают без начальной скорости. Траектория его движения изображена на рисунке. В установившемся режиме тело падает с постоянной скоростью под углом β к горизонту. Под каким углом γ к горизонту тело начало двигаться? Сила сопротивления воздуха, действующая на тело, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха и направлена противоположна ей.



Решение и распределение баллов:

В начальной точке на тело действуют сила тяжести mg , направленная вертикально вниз, и сила сопротивления $F=ku^2$, направленная горизонтально вправо. (1 балл)

В этот момент времени направление движения совпадает с направлением ускорения тела. Получаем, что:

$$\tan \gamma = \frac{mg}{ku^2}. \quad (2 \text{ балла})$$

При движении в установившемся режиме горизонтальная скорость тела равна скорости воздушного потока:

$$v_{\text{гор}} = u. \quad (1 \text{ балл})$$

Следовательно, вертикальная проекция скорости тела:

$$v_{\text{верт}} = v_{\text{гор}} \cdot \tan \beta = u \tan \beta. \quad (2 \text{ балла})$$

Кроме того, для установившегося режима:

$$mg = F_c = kv_{\text{верт}}^2 = ku^2(\tan \beta)^2. \quad (1 \text{ балл})$$

Получаем:

$$\frac{mg}{ku^2} = (\tan \beta)^2. \quad (1 \text{ балл})$$

Окончательно:

$$\tan \gamma = (\tan \beta)^2. \quad (2 \text{ балла})$$

Задача №4

Закреплённая пушка, установленная на горизонтальной поверхности земли, стреляет под углом α к горизонту, причём снаряды вылетают из пушки с начальной скоростью v_0 . После первого выстрела снаряд упал на расстоянии L от пушки. Второй выстрел оказался неудачным, и на некоторой высоте снаряд разорвался на два осколка массами m и $2m$. Первый, легкий осколок упал на землю на расстоянии $L/2$ от пушки, а второй осколок в момент падения первого находился строго над ним. Определите расстояние s между осколками к моменту падения на землю первого осколка.

Решение и распределение баллов:

Первый осколок упал точно под самой высокой точкой траектории снаряда, где и находился центр масс системы из двух осколков. **(3 балла)**

Т.е. расстояние от первого осколка до центра масс равно максимальной высоте полета снаряда:

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad \text{(3 балла)}$$

Получаем, что расстояние от центра масс до второго осколка:

$$y_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g}. \quad \text{(2 балла)}$$

Окончательно, расстояние между осколками:

$$s = y_1 + y_2 = \frac{3v_0^2 \sin^2 \alpha}{4g}. \quad \text{(2 балла)}$$

**Желаем успехов!!!
И да придет Рысь с Вами!**