Задача 1

При переходе луча света между соседними слоями с показателями преломления n и n' выполняется закон Снеллиуса:

$$n \cos\theta = n' \cos\theta'$$

где θ и θ' - соответствущие углы между направлением луча и осью Oz. Таким образом, величина $n\cos\theta = C$ - остается неизменной. **(1,5 балла)**

Рассмотрим преломление луча при попадании на торец волокна:

$$n_0 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_1$$

где θ_1 - угол между направлением луча и осью Oz на оси симметрии волокна $(x = 0)$. Тогда

$$C = n_1 \cos\theta_1 = n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_1} = n_1\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - \sin^2\theta_1} \text{ (1 балл)}$$

Из условия задачи $n(x) = n_1\sqrt{1-\beta^2x^2}$, где x - расстояние до оси симметрии волокна. Тогда на краю волокна $(x = a)$ выполняется $n_2 = n_1\sqrt{1-\beta^2a^2}$. Отсюда:

$$\beta = \frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}} = 9{,}176\cdot 10^{-3}\ \text{м}^{-1} \text{ (0,5 балла)}$$

Воспользуемся тригонометрическим тождеством:

$$x' = \frac{dx}{dz} = \tan\theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \sqrt{\frac{n^2}{C^2} - 1} = \sqrt{\frac{n_1^2(1-\beta^2x^2)}{C^2} - 1} \text{ (1,5 балла)}$$

Возьмем производную от x' по x:

$$x'' = \frac{-\frac{2xx'n_1^2\beta^2}{C^2}}{2\sqrt{\frac{n_1^2(1-\beta^2x^2)}{C^2} - 1}} = -\frac{2xx'n_1^2\beta^2}{2x'C^2} = -\frac{x(n_1^2 - n_2^2)}{a^2(n_1^2 - \sin^2\theta_i)} \text{ (0,5 балла)}$$

Таким образом, получаем уравнение гармонических колебаний:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{a^2(n_1^2 - \sin^2\theta_i)}}$$

Запишем в общем виде решение этого уравнения:

$$x(z) = X_1\sin(\omega z) + X_2\cos(\omega z)$$

Начальные условия **(0,5 + 0,5 балла)**:

$$x(0) = X_2 = 0$$

$$x'(0) = \omega X_1 = \tan\theta_1 = \sqrt{\frac{n_1^2}{C^2} - 1} = \sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2 - \sin^2\theta_i} - 1} = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2\theta_i}}$$

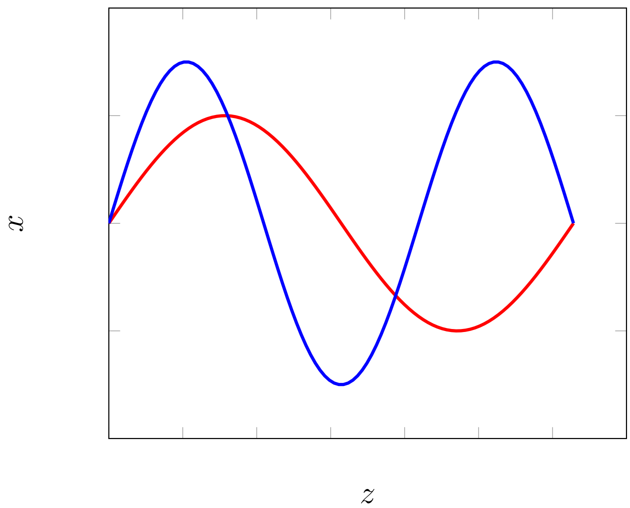
Отсюда

$$X_1 = \frac{a\sin\theta_i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad \textbf{(0,5 балла)}$$

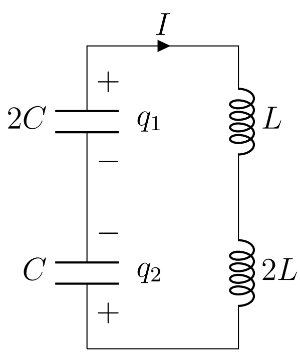
$$x(z) = \frac{a\sin\theta_i}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{a^2(n_1^2 - \sin^2\theta_i)}} z\right) \quad \textbf{(1 балл)}$$

Заметим, что при увеличении угла θ_i увеличивается и частота ω, то есть уменьшается период пересечения лучом оси симметрии. При этом амплитуда X_1, наоборот, увеличивается.

Траектории лучей при разных углах θ_i **(2,5 балла)**



Задача 2



Когда ток в катушках максимален, общее напряжение на конденсаторах равно нулю:

$$\frac{q_1}{2C} - \frac{q_2}{C} = 0 \ \textbf{(1 балл)} \tag{1}$$

Также, сохраняется заряд системы:

$$q_0 = q_1 + q_2 \ \textbf{(0,5 балла)} \tag{2}$$

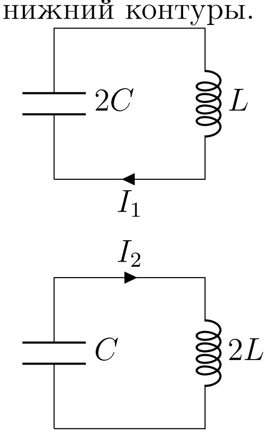
Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{q_0^2}{2 \cdot 2C} = \frac{q_1^2}{2 \cdot 2C} + \frac{q_2^2}{2 \cdot C} + \frac{LI^2}{2} \ \textbf{(1 балл)} \tag{3}$$

Решая (1), (2), (3), получим:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{2}{3} q_0 \\ q_2 = \dfrac{1}{3} q_0 \\ I = \dfrac{q_0}{3\sqrt{2LC}} \ \textbf{(0,5 балла)} \end{cases}$$

При замкнутом ключе K схему можно разделить на два независимых колебательных контура с одинаковой собственной частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$. При этом ток через перемычку будет равен $I_K(t) = I_1(t) - I_2(t)$, где I_1, I_2 - токи через верхний и нижний контуры.



Запишем решения для $I_1(t)$, $I_2(t)$ в общем виде:

$$I_1(t) = I_{01} \sin(\omega t + \phi_1) \quad I_2(t) = I_{02} \sin(\omega t + \phi_2)$$

Учтем начальные условия:

$$\begin{cases} I_1(0) = I_{01} \sin\phi_1 = I \\ I_2(t) = I_{02} \sin\phi_2 = I \\ \dfrac{q_1}{2C} = U_1(0) = L\dot{I}_1(0) = LI_{01}\omega\cos\phi_1 \\ -\dfrac{q_2}{C} = U_2(0) = 2L\dot{I}_2(0) = 2LI_{02}\omega\cos\phi_2 \end{cases}$$

Отсюда получаем **(0,5 + 0,5 + 1 + 1 баллов - за две фазы и две амплитуды)**:

$$\begin{cases} \tan\phi_1 = \dfrac{2LCI\omega}{q_1} = \dfrac{2LC\frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}\frac{1}{\sqrt{2LC}}}{\frac{2}{3}q_0} = \dfrac{1}{2} \\ \tan\phi_2 = \dfrac{2LCI\omega}{-q_2} = \dfrac{2LC\frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}\frac{1}{\sqrt{2LC}}}{-\frac{1}{3}q_0} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\phi_1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\phi_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{\tan^2\phi_2+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} \sin\phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\phi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} I_{01} = \dfrac{I}{\sin\phi_1} = I\sqrt{5} \\ I_{02} = \dfrac{I}{\sin\phi_2} = I\sqrt{2} \end{cases}$$

Из теоремы косинусов:

$$I_{max}^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(\phi_2-\phi_1)$$ **(2 балла)**

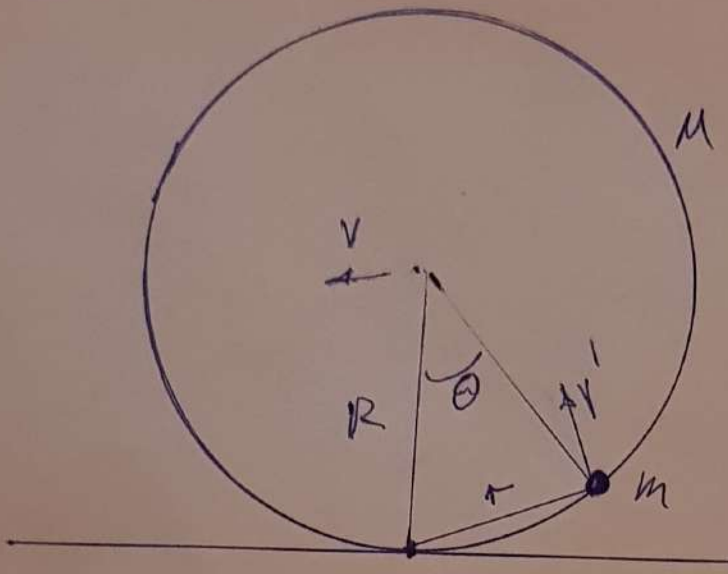
$$\cos(\phi_2-\phi_1) = \cos\phi_2\cos\phi_1 + \sin\phi_2\sin\phi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Таким образом

$$I_{max}^2 = 5I^2 + 2I^2 + 2I\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}} = 9I^2$$

$$I_{max} = 3I = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}$$ **(2 балла)**

Про колебания



$$\theta \ll 1$$
$$v = \omega R = \dot{\theta} R$$
$$v' = \omega r = \dot{\theta} r$$
$$R \gg r \quad v \gg v'$$

3 балла

$$W_к = MV^2 + \frac{mv'^2}{2} \simeq MV^2 = \frac{2M\dot{\theta}^2 R^2}{2}$$ — 3 балла

$$W_п = mgR(1-\cos\theta) \simeq mgR \cdot \frac{\theta^2}{2}$$ — 3 балла

$$\omega^2 = \frac{mgR}{2MR^2}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{mgR}} =$$

1 балл

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}}$$