

## Итоговая олимпиада РЫСЬ – 2

Осень 2021

9 класс

**Задача №1.** Товарный поезд, двигаясь с постоянным ускорением, въезжает в туннель со скоростью  $v_0$ . Известно, что первый вагон пробыл в туннеле в два раза дольше, чем последний. Какую скорость имел поезд в тот момент, когда целиком выехал из туннеля, если известно, что его длина равна длине туннеля? Длиной вагона по сравнению с длиной всего поезда пренебречь.

**Решение:**

Нам нужно найти конечную скорость поезда в ситуации, когда он проехал вторую половину пути вдвое быстрее, по сравнению с первой половиной.

Получаем, что  $\frac{s}{2} = \frac{v_c^2 - v_0^2}{2a} = \frac{v_k^2 - v_c^2}{2a}$ . В результате, скорость на середине пути:

$$v_c = \sqrt{\frac{v_0^2 + v_k^2}{2}}. \quad (1) \quad (3 \text{ балла})$$

Так как ускорение постоянно, то  $a = \frac{v_c - v_0}{2t} = \frac{v_k - v_c}{t}$ , в результате получаем:

$$v_c = \frac{2v_k + v_0}{3}. \quad (2) \quad (3 \text{ балла})$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), находим ответ:

$$v_k = 7v_0. \quad (4 \text{ балла})$$

**Задача №2**

Мяч, отбитый теннисистом на высоте  $h = 0,5$  м, поднимается на максимальную высоту  $H = 3$  м и за оставшееся время полёта перемещается по горизонтали на  $S = 12$  м.

1. Через какое время  $T$  после удара мяч поднимется на максимальную высоту?
2. Найдите начальную скорость  $v_0$  мяча.

Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

**Решение:**

Уравнения движения мяча до верхней точки полёта:

$$H = h + v_0 \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2}, \quad (1 \text{ балл})$$

$$0 = v_0 \sin \alpha - gT. \quad (1 \text{ балл})$$

В результате, получаем:

$$T = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \approx 0,7 \text{ с.} \quad (2 \text{ балла})$$

Уравнения движения мяча от верхней точки до Земли:

$$S = v_0 \cos \alpha \cdot \tau, \quad (1 \text{ балл})$$

$$0 = H - \frac{g\tau^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

Из этих уравнений получаем, что:

$$v_0 \cos \alpha = S \sqrt{\frac{g}{2H}}. \quad (1 \text{ балл})$$

Кроме того:

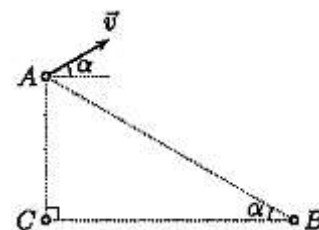
$$v_0 \sin \alpha = gT = g \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \sqrt{2g(H-h)}. \quad (1 \text{ балл})$$

Окончательно, получаем:

$$v_0 = \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + (v_0 \cos \alpha)^2} = \sqrt{2g \left( H - h + \frac{S^2}{4H} \right)} \approx 17 \text{ м/с.} \quad (2 \text{ балла})$$

### Задача №3

По гладкой горизонтальной поверхности скользит пластинка, на которой отмечены три точки –  $A$ ,  $B$  и  $C$ , лежащие в вершинах прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  при вершине  $B$ . Гипотенуза треугольника равна  $L$ . В некоторый момент времени скорость точки  $A$  равна по модулю  $v_0$  и направлена под углом  $30^\circ$  к катету  $BC$ . Известно также, что скорость точки  $B$  направлена вдоль линии, параллельной катету  $AC$ . Определите:

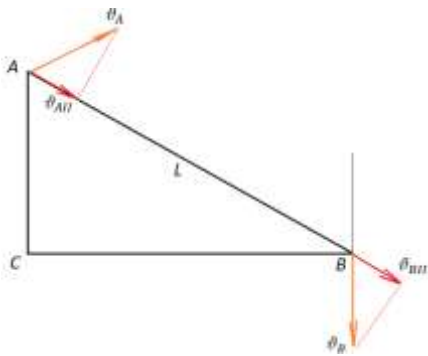


1. модуль и направление скорости точки  $B$ ;
2. модуль и направление скорости точки  $C$ ;
3. положение точки  $O$ , скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Изобразите на чертеже векторы скоростей точек  $B$  и  $C$ , а также положение точки  $O$ .

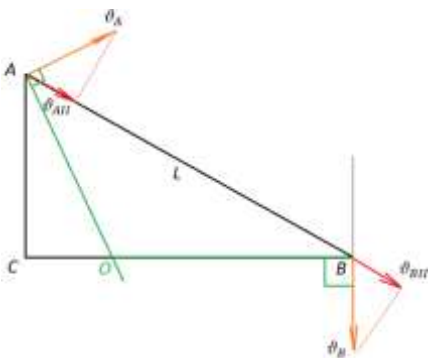
### Решение:

Определим проекцию скорости точки  $A$  на гипотенузу –  $u_{A||} = u_{AC} \cos 60^\circ = u_0/2$  (1 балл)



Так как пластинка жесткая, то проекция скорости точки В на это направление точно такая же. Но сама скорость точки В направлена под углом  $60^\circ$  к направлению АВ, а это значит, что  $v_B \cos 60^\circ = v_0/2$  и  $v_B = v_0$  **(2 балла)**

Теперь построим перпендикуляры к скоростям точек А и В и пересечем их.



**(2 балла)**

Эти два зеленых перпендикуляра пересекутся в точке О. Эта точка – мгновенный центр вращения. Это как раз та точка, скорость которой равна нулю. Так как треугольник АОВ равнобедренный, то

$$OB = \frac{\frac{L}{2}}{\cos 30^\circ} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$OC = L \cos 30^\circ - \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$

**(2 балла)**

так как  $v_B = v_0 = \omega \cdot OB$

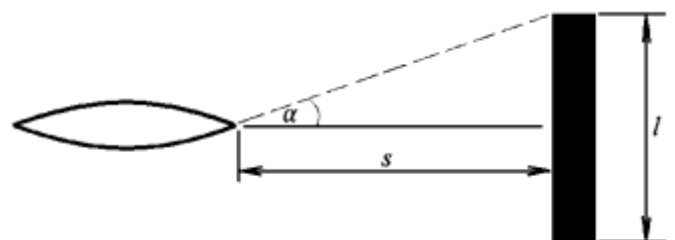
**(1 балл)**

то  $v_C = \omega \cdot OC = \frac{v_0}{OB} \cdot OC = \frac{v_0}{2}$

**(2 балла)**

#### **Задача №4**

Турист, сплавлявшийся по реке на байдарке, заметил, что поток несет его к середине упавшего и перегородившего ему путь дерева в тот момент, когда расстояние от носа байдарки до дерева было  $s = 40$  м. Оценить, под каким углом к скорости течения он должен направить байдарку, чтобы обойти преграду, если скорость реки  $u = 3,6$  км/ч, скорость байдарки в стоячей воде  $v = 5,4$  км/ч, длина дерева  $l = 30$  м.



**Решение:**

Для начала переведем скорости в единицы СИ: м/с.

$$u = 3,6 \text{ км/ч} = 1 \text{ м/с} \quad u = 5,4 \text{ м/с} = 1,5 \text{ м/с} \quad (1 \text{ балл})$$

Становится понятно, что, если турист изменит направление движения на то, которое показано штриховкой, чтобы обойти бревно, то его собственная скорость распадется на две составляющие: продольную и поперечную. Продольная составляющая равна  $v \cdot \cos \alpha$ , а поперечная  $v \cdot \sin \alpha$ . (1 балл)

Не забудем про скорость реки: она сложится с продольной составляющей собственной скорости, и по течению турист будет двигаться с итоговой скоростью

$$v \cdot \cos \alpha + u. \quad (1 \text{ балл})$$

Тогда, чтобы обойти дерево, турист должен успеть за время приближения к преграде, равное  $t = \frac{s}{v \cos \alpha + u}$ , (1 балл)

отклонить нос лодки на расстояние, равное половине длины бревна:

$$t = \frac{\frac{L}{2}}{v \sin \alpha} \quad (1 \text{ балл})$$

Приравняем:

$$\frac{s}{v \cos \alpha + u} = \frac{\frac{L}{2}}{v \sin \alpha} \quad 2v s \sin \alpha = L u \cos \alpha + L u$$

На этом этапе решения можно подставить числа, поскольку решение в общем виде довольно громоздко.

$$8 \sin \alpha = 3 \cos \alpha + 2$$

Возведем в квадрат и получим квадратное уравнение относительно  $\cos \alpha$

$$73 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha - 61 = 0 \quad (2 \text{ балла})$$

Решим квадратное уравнение:

$$\text{и получим } \cos \alpha = \frac{61}{73} \approx 0,8356 \quad (2 \text{ балла})$$

$$\text{Выразим угол в градусах } \alpha = \arccos(0,8356) \approx 33,3^\circ \quad (1 \text{ балл})$$